Semplice dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat

Armando Pannella, Accenture S.p.A.

Abstract.

Lo scopo di questo lavoro è di produrre una dimostrazione elementare dell'ultimo teorema di Fermat. L'unica dimostrazione attualmente valida ed accettata dalla comunità scientifica è quella fornita da A. Wiles attraverso la dimostrazione della congettura di Taniyama. La complessità dei concetti matematici coinvolti in questa dimostrazione ha spinto molti matematici, sia professionisti che dilettanti, a continuare a cercare la dimostrazione che Fermat non riusciva contenere nel margine troppo stretto della pagina. Il presente lavoro prova a dimostrare l'ultimo teorema di Fermat partendo dalle sue relazioni con il Teorema di Piatagora.

Introduzione ed enunciato.

L'ultimo teorema di Fermat (UTF di seguito nel testo) è considerato nella forma

Th. $\forall\ a, b, c \in \mathbf{Z_0}, \forall\ n \in \mathbf{N}, n > 2 \quad \Rightarrow \quad a^n + b^n \neq c^n$.

La dimostrazione inizia provando un lemma che connette il teorema di Paitagora con quello di Fermat sopra enunciato, prova poi il caso di a, b, c positivi e si conclude provando il caso generale.

Dimostrazione.

Lemma 1 $\forall\ a, b, c \in R_0^+ \ : \ a^2 + b^2 = c^2\ , \forall\ n \in \mathbf{N}, n > 2 \ \Rightarrow \ a^n + b^n \neq c^n$.

Dim Dalle ipotesi è possible scrivere che, $\forall\ n \in \mathbf{N}, n > 2$

$$(a^2 + b^2)^n = (c^2)^n. \qquad (1)$$

Sviluppando il primo membro della formula (1) con la formula del binomio di Newton[1] si ottiene

$$(a^2+b^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a^2)^{n-k} (b^2)^k = \binom{n}{0} (a^2)^n (b^2)^0 + \binom{n}{n} (a^2)^{n-n} (b^2)^n + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (a^2)^{n-k} (b^2)^k \equiv a^{2n} + b^{2n} + P(n,a,b) \qquad (2)$$

dove i passaggi intermedi sono semplici applicazioni dei coefficienti binomiali. La quantità P(n, a, b) è strettamente positive poichè soma di n-1 termini positivi. Dall'equazione (1) e dalla (2) si ottiene

$$a^{2n} + b^{2n} + P(n,a,b) = c^{2n} \qquad (3)$$

e quindi $a^{2n} + b^{2n} > c^{2n}$. Dalle proprietà delle radici quadrate si ha[1] , infine,

$$a^n + b^n = \sqrt{a^{2n}} + \sqrt{b^{2n}} \geq \sqrt{a^{2n} + b^{2n}} > \sqrt{c^{2n}} = c^n \, . \qquad (4)$$

Provato il lemma 1, dimostriamo ora UTF per I numeri positivi, i. e. $\forall$ a, b, c $\in$ $\mathbf{N_0}$ **.**

<u>Th.</u>(UTF$^+$) $\forall$ a, b, c $\in$ $\mathbf{N_0}$ **,** $\forall$ n $\in$ $\mathbf{N}$, n > 2 $\Rightarrow$ $a^n + b^n \neq c^n$.

<u>Dim</u> Dati 3 generici numeri naturali a,b e c si possono distinguere solo 2 casi (vd. Fig. 1). Il terzo caso rientra nel lemma 1

- La terna pitagorica è incompleta
- La terna pitagorica è eccedente

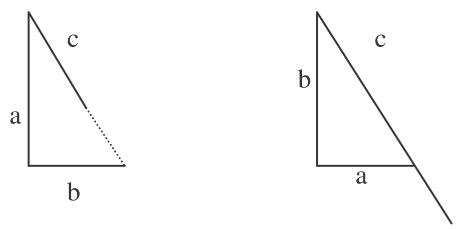

Figura 1: 2 possibili casi.

Nel primo caso, per la completezza[1] di **R ,** deve esistere un numero reale y tale che

$$(a^2 + b^2) = (c+y)^2 \ , \ y \in \ R_0^+ \qquad (5)$$

Per il lemma 1 si ha

$$a^n + b^n > (c+y)^n = c^n + y^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} c^{n-k} y^k \equiv c^n + Q(y,n,c) \qquad (6)$$

Il calcolo è simile a quello fatto nella formula (2); dato che Q(y, n, c) è la soma di numeri positive si ha che

$$a^n + b^n > c^n. \qquad (7)$$

Nel secondo caso, per la completezza[(1)] di **R** devono esistere 2 numeri reali positivi tali che

$$(b+x)^2 + (a+z)^2 = c^2 \text{ (vd. fig. 2).} \qquad (8)$$

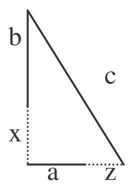

Figura 2: caso di terna pitagorica eccedente

Per il Lemma 1 abbiamo

$$(b + x)^n + (a + z)^n > c^n \qquad (9)$$

E sviluppando con il metodo del binomio di Newton troviamo (calcolo analogo a quello fatto in (2)

$$b^n + Z(b, x, n) + a^n + Y(a, z, n) > c^n, \qquad (10)$$

dove le quantità Z and Y sono strettamente positive essendo somma di termini positivi. Si ha quindi che

$$b^n + a^n > c^n. \qquad (11)$$

Provato ciò, consideriamo il caso genereale di a,b,c interi, i. e. $\forall$ a, b, c $\in$ $\mathbf{Z_0}$ **.**

<u>*Th.*</u>*(UTF)* $\forall$ a, b, c $\in \mathbf{Z_0}$ **,** $\forall$ n $\in$ **N** , n > 2 $\Rightarrow$ $a^n + b^n \neq c^n$.

<u>*Dim*</u> Distinguiamo 4 casi (il caso a, b, c > 0 è stato appena trattato)

1. a, b, c <0 . La tesi diviene $(-|a|)^n + (-|b|)^n \neq (-|c|)^n$
2. a, c < 0, b > 0 . La tesi diviene $(-|a|)^n + b^n \neq (-|c|)^n$
3. a, b < 0, c > 0. La tesi diviene $(-|a|)^n + (-|b|)^n \neq c^n$
4. b, c < 0, a > 0. La tesi diviene $a^n + (-|b|)^n \neq (-|c|)^n$

Per n pari, la dimostrazione è la stessa che per a,b,c positivi. Per n pari, si dimostrano le tesi precedentemente scritte nel modo seguente.

1. Moltiplicando ambo i membri per $(-1)^n$ ci si reduce al caso di numeri positivi.
2. Moltiplicando ambo i membri per $(-1)^n$ ci si reduce a $|a|^n - |b|^n \neq |c|^n$, i.e. $|a|^n \neq |b|^n + |c|^n$: questo è il caso di numeri positivi.
3. Questo caso è necessariamente vero, poichè la soma di 2 numeri negative non può dare un numero positivo.
4. Moltiplicando ambo i membri per $(-1)^n$ ci si reduce a $-|a|^n + |b|^n \neq |c|^n$, i.e. $|b|^n \neq |c|^n + |a|^n$: questo è il caso di numeri positivi.

<u>Conclusioni.</u>

Era questa la dimostrazione di Fermat?

(1) J. P. Cecconi, G. Stampacchia, *Analisi Matematica*, Liguori Editore, 1974